MPA S2 algèbre 2014
Responsable : Christine Huyghe
Contrôle Continu 1 du 5 mars 2015
Durée 1h30.

Il sera accordé le plus grand soin à la qualité de la rédaction. Sont interdits : les documents, les téléphones portables, les baladeurs, et tout autre objet électronique (calculatrice, ...). Le barème noté n'est qu'indicatif. Vous pouvez admettre le résultat d'une question afin de traiter les questions suivantes.

1. Cours. 4pt

- 1- Montrer qu'une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- 2- Rappeler l'énoncé et le calcul du déterminant de van der Monde (sans donner la démonstration).

2. Vrai/Faux. 4pt Vous devez impérativement justifier votre réponse, si nécessaire par un contre-exemple.

- 1- Soient U l'espace vectoriel des suites complexes, $a, b \in \mathbb{C}$ et

$$V = \{(u_n) \in U \mid \forall n \geq 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}.$$

L'ensemble V est un sous-espace vectoriel de U .

- 2- Soient U l'espace vectoriel des suites complexes et

$$W = \{(u_n) \in U \mid u_1 = (u_0)^2\}.$$

W est un sous-espace vectoriel de U .

- 3- Les fonctions $1, e^x, xe^x$ forment une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

3. Exercice 2. 4pt

- 1- Les vecteurs

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

- 2- Soit

$$F = \left\{ W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tels que } x + z = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que (U, V) forme une base de F .

4. **Exercice 3. 8pt** Soit $M = M_4(\mathbb{C})$ et $E = \mathbb{C}^4$.

1- Soit $A \in M$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $B = A - Id$.

2- Montrer que $A^4 = Id$ et calculer $\det(A)$.

3- Montrer que Id, A, A^2, A^3 forment une famille libre de M , puis que Id, B, B^2, B^3 forment une famille libre de M .

4- Montrer que B n'est pas inversible et que $\text{rang}(B) = 3$.

5- Soit $F = \{X \in \mathbb{C}^4 \mid AX = X\}$. Montrer que F est une droite vectorielle de $\mathbb{C}^4$ et en donner une base.

6- En utilisant la définition de B , montrer qu'il existe un polynôme unitaire (de coefficient dominant égal à 1), de degré 4, sans terme constant $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(B) = 0$. Ecrire $P(X) = XQ(X)$ où Q est un polynôme unitaire de degré 3, de sorte que $BQ(B) = 0$.

7- Montrer que $Q(B) \neq 0$.